

2.3.1. Az események információtartalma

Az előző fejezetben láthattuk, hogy egyetlen esemény bekövetkeztével kapcsolatos értesülés információtartalma mikor 0 és mikor 1 [(1) és (2) képlet]. Továbbá az is megállapítást nyert, hogy több esemény esetén természetesen több bitnyi információ szükséges valamelyik kiválasztásához (pl. sok közül egy adott kártyalap kitalálásához). A hétköznapi életből azt is tudjuk, hogy minél több, egyforma eséllyel lejátszódható esemény bekövetkezése lehetséges, annál kisebb lesz ezek közül az egyik bekövetkeztének valószínűsége. A következőkben az események bekövetkezési valószínűsége, és azok információtartalma közötti összefüggésre mutatunk rá. Ezekhez felhasználjuk az eddigi megállapításainkat, illetve egyéb (tapasztalati, matematikai) ismereteinket is.

Emlékeztetőül: egy esemény bekövetkezésének valószínűségét (p) úgy számíthatjuk ki, hogy a kedvező esetek számát (k) osztjuk a lehetséges, azaz összes esetek számával (n). A jelölésekkel leírva a valószínűség: $p=k/n$. Bővítve egy kicsit a képletet, jelölve, hogy ezt egy adott 'x' eseményre vonatkoztatjuk, akkor így alakul:

$$p(x) = \frac{k(x)}{n}. \quad (5)$$

Néhány konkrét példa a képlet alkalmazására:

3. *példa.* Mennyi a valószínűsége egy adott lap kihúzásának egy magyar kártyacsomagból? Az (5) képletben az x esemény most egy adott lap húzását jelenti, de számunkra csak egy meghatározott lap lesz a jó, ezt jelöli a $k(x)=1$, és összesen 32 lap közül húzhatunk, ezért az $n=32$. Tehát a keresett valószínűség:

$$p(x) = \frac{k(x)}{n} = \frac{1}{32} (=0,03125, \text{ vagyis } 3,125\%).$$

4. *példa.* Mennyi a valószínűsége, hogy egy dobókockával dobva páros számú pettyek kerülnek felülre? Az 'x' esemény tehát a páros érték dobása. A kedvező esetek száma $k(x)=3$ (mert páros eredmény esetén 2, vagy 4, vagy 6 petty lehet felül), az összes lehetséges eset pedig $n=6$ (1, 2, 3, 4, 5, vagy 6 pettyet tartalmazó oldal valamelyike kerül felülre). Tehát a valószínűség:

$$p(x) = \frac{k(x)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ (azaz } 50\%).$$

Belátható, hogy a páratlan számú érték dobásának valószínűsége pont ugyanannyi, mint a párosé, hiszen ott is 3 kedvező esetünk van. Ha pedig bármilyen dobhatunk, az hatféle érték lehet, s ekkor a valószínűség $6/6=1$, tehát a biztos valószínűséget kapjuk, hiszen a hat közül valamilyen számú petty biztosan felülre fog kerülni. Ezt általános megfogalmazásban rögzíthetjük is:

A biztos esemény bekövetkezésének valószínűsége 1 (azaz 100 %). Ennek ellentéte az, hogy ha valamilyen esemény biztosan nem következhet be, akkor annak valószínűségi értéke 0.

Ha a köztes eseteket is vizsgálni akarjuk, akkor meg kell állapítanunk egy összefüggést. Ki kell tehát fejeznünk azt, hogy egy esemény bekövetkeztének információtartalma annál nagyobb, minél kisebb ennek az eseménynek a bekövetkezési

valószínűsége. Egyszerű a megoldás, csak a már megállapított (4) képletben szereplő paramétereket kell a mostani fogalmainkkal egymásnak megfeleltetni. Ebben a k jelentette a kérdések számát, most pedig az $I(x)$ információ nagyságát. A hatvány értéke a b , amelyet most a reciprokok valószínűség fog megadni:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} \text{ [bit]}, \quad (6)$$

ahol $I(x)$ egy adott x esemény bekövetkeztének információtartalma, $p(x)$ pedig az x esemény bekövetkeztének a valószínűsége. A gyakorlatban a (6) képlet számunkra azt jelenti, hogy minél váratlanabb (kevésbé valószínűbb) egy esemény bekövetkezése, az annál több információt hordoz. Azaz, ha $p(x_1) < p(x_2)$, akkor $I(x_1) > I(x_2)$.

További matematikai átalakításokat végezve a (6) képletben, az más alakra is hozható:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} = \log_2 (p(x))^{-1} = -\log_2 (p(x)).$$

Nézzük meg ennek a képletnek a használatát néhány, korábban már említett esetre!

5. *példa.* Mennyi az információtartalma a biztos eseménynek? A biztos esemény bekövetkezési valószínűsége 100%, azaz $p(x)=1$. A (6) képlet alapján az információtartalom:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} = \log_2 \frac{1}{1} = \log_2 1 = 0 \text{ [bit]}.$$

Tehát a biztos esemény információtartalma 0, ahogy ezt az (1) képlet már korábban jelezte. Erre példa, ha azt mondom, hogy holnap reggel felkel a nap, mert ez a tény biztos eseménynek tekinthető, de ezzel a kijelentéssel semmi újat nem mondtam, tehát nem kaptam információt (nem teljesült az információ egyik feltétele, az újszerűség).

6. *példa.* Mennyi az információtartalma annak a kijelentésnek, hogy egy érme feldobása után az 'írás' oldal kerül felülre? Két eset lehet: fej, vagy írás ($n=2$). Az írás valószínűsége 50%, azaz $p(x)=1/2$. Ez az érték az (5) képletből adódik, de tapasztalatból is tudjuk. Így a kijelentés információtartalma:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{2}} = \log_2 2 = 1 \text{ [bit]}.$$

Az eredményt összevetve a (2) képlettel, azzal szükségszerűen egyezést látunk, azaz felére csökkentett bizonytalansággal 1 bitnyi információt szereztünk.

7. *példa.* Mennyi az információtartalma annak a kijelentésnek, hogy a 32 lapos magyarkártya-csomagból a piros királyt húztam? Fentebb már láthattuk (3. példa), hogy egy adott lap húzásának valószínűsége $p(x)=1/32$. Ezért a kijelentés információtartalma:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)} = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{32}} = \log_2 32 = 5 \text{ [bit]}.$$

Másként fogalmazva, 5 bitnyi információ szükséges egy adott lap kitalálásához. Ezt az értéket fentebb már más módszerrel is megállapítottuk (lásd: 1. példa).

Megjegyzés: Eddigi példáinkban az előforduló események egyforma valószínűséggel szerepeltek. Ha különböző valószínűséggel következhetnek be események, akkor az azokhoz társítható információnagyság ugyancsak a (6) képlettel számítható, de természetesen előtte valószínűségszámítással kell meghatározni az adott eseményhez tartozó $p(x)$ értéket